 Jochen Weber

Modellierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen

Beispiele:

1 Das statistische Bundesamt hat die Bevölkerungszahlen einer Metropolregion in der Bundesrepublik Deutschland ermittelt. Im Jahr 2000 betrug die Bevölkerung 5 Millionen Menschen, im Jahr 2015 lebten in derselben Region 6 Millionen Menschen. Bestimmen Sie ausgehend vom Jahr 2000 die Funktionsgleichung einer Funktion f der Form $f(t) = a \cdot e^{c \cdot t}$. Dabei gibt $t \geq 0$ die Zeit in Jahren ab dem Jahr 2000 an und f(t) die Bevölkerungszahl in der Region in Millionen Menschen zum Zeitpunkt t. ○

2.0 Heißer Kaffee kühlt von anfänglich 70°C in der Tasse innerhalb von 3 Minuten auf eine Temperatur von 60°C ab.

2.1 Beschreiben Sie ein passendes Abkühlgesetz durch eine Exponentialfunktion der Form $f(t) = a \cdot e^{ct} + 20$. Dabei soll t $(t \in \mathbb{R};\ t \geq 0)$ der Zeit in Minuten angeben, die seit Beginn der Abkühlung vergangen ist und f(t) die Temperatur des Kaffees in °C. ○

2.2 Berechnen Sie, wann der Kaffee die Trinktemperatur von 58 °C erreicht hat. ○

2.3 Interpretieren Sie die Konstante 20 im Funktionsterm.

Lösungen:

1)

$$f(t) = a \cdot e^{ct}$$

$$f(0) = 5 \quad \Rightarrow a \cdot e^{c \cdot 0} = 5 \quad \Rightarrow a = 5$$

$$f(15) = 6 \quad \Rightarrow a \cdot e^{15c} = 6$$

$$\Rightarrow 5 \cdot e^{15c} = 6 \quad \Rightarrow e^{15c} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow 15c = \ln\left(\frac{6}{5}\right) \quad \Rightarrow c = \frac{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}{15} \approx 0{,}0122$$

$$\Rightarrow f(t) = 5e^{0{,}0122t}$$

2.1

$$f(t) = a \cdot e^{ct} + 20$$

$$f(0) = 70 \quad \Rightarrow a + 20 = 70 \quad \Rightarrow a = 50$$

$$f(3) = 60 \quad \Rightarrow a \cdot e^{3c} + 20 = 60$$

$$\Rightarrow 50e^{3c} = 40 \quad \Rightarrow e^{3c} = 0{,}8 \quad \Rightarrow 3c = \ln(0{,}8) \quad \Rightarrow c = \frac{\ln(0{,}8)}{3} \approx -0{,}0744$$

$$\Rightarrow f(t) = 50e^{-0{,}0744t} + 20$$

2.2

$$50e^{-0{,}0744t} + 20 = 58 \quad \Rightarrow 50e^{-0{,}0744t} = 38 \quad \Rightarrow e^{-0{,}0744t} = 0{,}76$$

$$\Rightarrow -0{,}0744t = \ln(0{,}76) \quad \Rightarrow t = \frac{\ln(0{,}76)}{-0{,}0744} \approx 3{,}69\,\text{min}$$

2.3 Der Kaffee kühlt nach langer Zeit auf annähernd 20 °C ab.
Das wird die Raumtemperatur sein.

Aufgaben:

1.0 Die Bevölkerung Nigerias betrug 2012 ca. 167 Millionen Menschen. Man rechnet mit einem jährlichen Bevölkerungswachstum von 3,1 %.

1.1 Bestimmen Sie die zugrunde liegende Exponentialfunktion sowohl in der Form $f(t)=a\cdot b^t$ als auch zur Basis e mit $f(t)=a\cdot e^{ct}$.

1.2 Berechnen Sie die voraussichtliche Einwohnerzahlen in den Jahren 2015, 2020 und 2030.

1.3 Bestimmen Sie, in welchem Jahr sich bei gleicher Wachstumsrate die nigerianische Bevölkerung im Vergleich zu 2012 verdoppelt hat.

2.0 Nach einem Modell des britischen Ökonomen Thomas Malthus kann die Anzahl B(t) der auf der Erde lebenden Menschen in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:

$B(t)=B_0\cdot e^{r\cdot t},\ t\geq 0,\ r>0$.

Dabei gibt B_0 die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t = 0 am 1.1.1800 an und r ist ein Maß für die Wachstumsrate der Bevölkerung. Am 1.1.1950 betrug die Weltbevölkerung etwa 3,7 Milliarden Menschen und am 1.1.2050 werden etwa 9,5 Milliarden Menschen erwartet.

2.1 Zeigen Sie, dass für die Werte B_0 und r gilt:

$B_0=0{,}9\cdot 10^9$ und $r=9{,}43\cdot 10^{-3}$.

Stellen Sie die Entwicklung der Weltbevölkerung zwischen dem 1.1.1800 und dem 1.1.2050 in einem Koordinatensystem dar. Wählen Sie einen geeigneten Maßstab.

2.2 Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch die Bevölkerungszahl zu Beginn des Jahres 2017. Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung vom tatsächlichen Wert von 7,47 Milliarden Menschen.

3.0 Bei Bergwanderungen kann man mithilfe eines Luftdruckmessgerätes den Höhenunterschied bezüglich der Startposition bestimmen. Dem Standort wird dabei stets die (relative) Höhe 0 m zugeordnet. Es gilt die sogenannte barometrische Höhenformel $p(h)=p_0\cdot e^{-k\cdot h}$, wobei P_0 der Luftdruck am Startort ist, p(h) der Luftdruck nach h zurückgelegten Höhenmetern und k eine Gerätekontante. Alle Druckangaben sind in Hektopascal (hPa), alle Höhenangaben in Meter.

3.1 Bei einer Tagestour werden auf dem Weg zum Gipfel laut Karte 843 Höhenmeter zurückgelegt. Der Luftdruck am Startort hat die Maßzahl p_0 = 750 und ist am Gipfel laut Messgerät um 10 % gefallen. Berechnen Sie mithilfe dieser Angaben die Maßzahl der Gerätekonstanten k auf sechs Dezimalen gerundet.

3.2 Berechnen Sie den Luftdruck in den Höhen 500 m unterhalb und 1000 m oberhalb des Startpunktes.
Berechnen Sie, in welcher Höhe über dem Ausgangsniveau sich der Bergsteiger befindet, wenn das Gerät 720 hPa anzeigt.

4.0 Die Temperatur einer Herdplatte kühlt gemäß f mit $f(t)=22+178e^{-ct}$ $(t\in\mathbb{R};\ t\geq 0)$ exponentiell ab. Dabei gibt t die Zeit in Minuten und $f(t)$ die Temperatur in °C an.

4.1 Ermitteln Sie die Unbekannte c, wenn die Temperatur nach zwei Minuten 160 °C beträgt.

4.2 Berechnen Sie die Temperatur bei Beobachtungsbeginn.

4.3 Untersuchen Sie, auf welche Temperatur die Herdplatte sich langfristig abkühlen wird.

4.4 Ermitteln Sie, wie lange es dauert, bis die beobachtete Herdplatte auf 45 °C abgekühlt ist.

5.0 Ein Stück radioaktives Thorium hat am Anfang eines Versuches eine Masse von 500 mg. Jede halbe Minute wird die nicht zerfallene Masse gemessen.

Zeit in s	0	30	60	90
Masse in mg	500	341	233	159

5.1 Prüfen Sie, ob es sich um einen exponentiellen Zerfall handelt.

5.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

5.3 Ermitteln Sie, nach welcher Zeit nur noch 1 % der ursprünglichen Masse vorhanden ist.

Lösungen:

1.1 $f(x)=167\cdot 1{,}031^x \qquad f(x)=167\cdot e^{\ln(1{,}031)\cdot x}$

1.2

2015: $f(3)\approx 183{,}017$ Millionen

2020: $f(8)\approx 213{,}199$ Millionen

2030: $f(18)\approx 289{,}316$ Millionen

1.3 $167\cdot 1{,}031^x = 2\cdot 167 \quad \Rightarrow 1{,}031^x = 2 \quad \Rightarrow x=\dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}031)}\approx 22{,}70$ Jahre, also im Jahr 2035

2.1

(I) $B(150)=3{,}7\cdot 10^9 \quad \Rightarrow B_0\cdot e^{150r}=3{,}7\cdot 10^9$

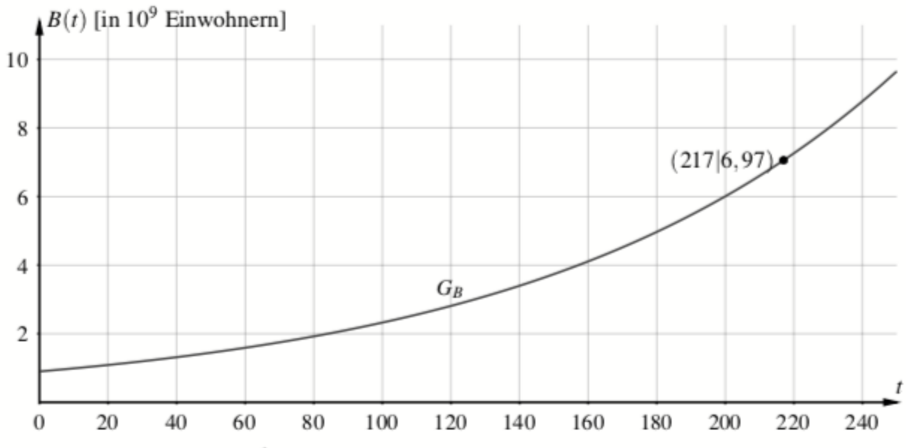
(II) $B(250)=9{,}5\cdot 10^9 \quad \Rightarrow B_0\cdot e^{250r}=9{,}5\cdot 10^9$

(I) $\Rightarrow B_0=\dfrac{3{,}7\cdot 10^9}{e^{150r}}$

B_0 in (II): $\dfrac{3{,}7\cdot 10^9}{e^{150r}}\cdot e^{250r}=9{,}5\cdot 10^9$

$\Rightarrow 3{,}7\cdot 10^9\cdot e^{100r}=9{,}5\cdot 10^9 \quad \Rightarrow e^{100r}=\dfrac{9{,}5}{3{,}7} \quad \Rightarrow r=\dfrac{\ln(\frac{9{,}5}{3{,}7})}{100}\approx 9{,}43\cdot 10^{-3}$

$\Rightarrow B_0=\dfrac{3{,}7\cdot 10^9}{e^{150\cdot 9{,}43\cdot 10^{-3}}}\approx 0{,}9\cdot 10^9$



2.2

$B(217)=0{,}9\cdot 10^9\cdot e^{9{,}43\cdot 10^{-3}\cdot 217}\approx 6{,}97\cdot 10^9$

$\dfrac{6{,}97\cdot 10^9}{7{,}47\cdot 10^9}\approx 0{,}93 \quad \Rightarrow$ die Abweichung beträgt etwa 7 %

3.1

Luftdruck am Gipfel: $p(843)=750-75=675$

$$675=750\cdot e^{-843k} \quad \Rightarrow e^{-843k}=\frac{9}{10} \quad \Rightarrow k=\frac{\ln(0,9)}{-843}\approx 0,000125$$

3.2

Luftdruck 500 m unterhalb des Startpunktes: $p(-500)\approx 798$ hP

Luftdruck 1000 m oberhalb des Startpunktes: $p(1000)\approx 663$ hPa

$$720=750\cdot e^{-0,000125h} \quad \Rightarrow e^{-0,000125h}=\frac{24}{25} \quad \Rightarrow h=\frac{\ln(\frac{24}{25})}{-0,000125}\approx 327\text{ m}$$

4.1 $22+178\cdot e^{-2c}=160 \quad \Rightarrow 178\cdot e^{-2c}=138 \quad \Rightarrow e^{-2c}=\frac{69}{89} \quad \Rightarrow c=\frac{\ln\left(\frac{69}{89}\right)}{-2}\approx 0,12726$

4.2 $f(0)=22+178\cdot e^{-0,12726\cdot 0}=200\text{ °C}$

4.3

$t\to\infty \quad \Rightarrow f(t)\to 22$

Die Temperatur der Herdplatte kühlt sich langfristig auf 22 °C ab.

4.4

$$22+178\cdot e^{-0,13\cdot t}=45 \quad \Rightarrow 178\cdot e^{-0,13\cdot t}=23 \quad \Rightarrow e^{-0,13\cdot t}=\frac{23}{178}$$

$$\Rightarrow -0,13t=\ln\left(\frac{23}{178}\right) \quad \Rightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{23}{178}\right)}{-0,13}\approx 15,74$$

Nach etwa 15,74 Minuten hat die Herdplatte noch 45°C.

5.1

$$\frac{341}{500}=0,682 \quad \frac{233}{341}\approx 0,683 \quad \frac{159}{233}\approx 0,682$$

Der Quotient aufeinanderfolgender Tage bleibt konstant,

also liegt ein exponentieller Zerfall vor.

5.2

$f(0)=500 \quad f(30)=341$

$$\Rightarrow 341=500\cdot e^{30c} \quad \Rightarrow e^{30c}=0,682 \quad \Rightarrow 30c=\ln(0,682) \quad \Rightarrow c=\frac{\ln(0,682)}{30}\approx -0,01276$$

$$\Rightarrow f(t)=500\cdot e^{-0,01276t}$$

5.3

$1\,\%$ von $500 \quad \Rightarrow 5$

$$\Rightarrow 500 \cdot e^{-0{,}01276\,t} = 5 \quad \Rightarrow e^{-0{,}01276\,t} = 0{,}01 \quad \Rightarrow t = \frac{\ln(0{,}01)}{-0{,}01276} \approx 360{,}91 \text{ Sekunden}$$